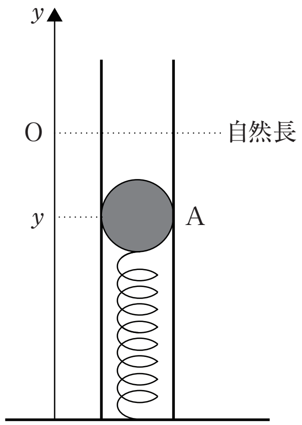
第8講　単振動と万有引力

1

内壁のなめらかで鉛直な筒の中に，下端を固定したばね（ばね定数 k）を立て，上端に物体A(質量 m) を取りつけ，上下に振動させる。ばねが自然長のときの A の高さを原点として鉛直上向きに y 軸をとり，物体 A の位置を y で表す。A は質点とみなせる。重力加速度の大きさを g とする。はじめ物体 A はある位置で静止していた。

$t=0$ で，物体 A を静止していた点からさらに d $(d>0)$ だけ押し下げて静かに放した。

(1) 加速度を鉛直上向きに a として，物体 A がある位置 y を通過した瞬間の運動方程式を書け。
(2) 振幅を求めよ。
(3) 振動中心の座標を求めよ。
(4) 周期を求めよ。
(5) 振動の速さの最大値を求めよ。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

図のように，地球の中心Oを中心として，地球の半径 R の n 倍の半径で等速円運動をしている人工衛星がある。この質量 m の人工衛星は，地球の赤道面内を地球の自転と同じ向きにまわっている。地球の質量を M，地球の自転の角速度を ω，地球表面での重力加速度を g として，以下の問いに答えよ。ただし，地球は球とし，その質量は中心に集中していると考えて良い。また，重力には万有引力の寄与のみを考えるものとする。

(1)　人工衛星の高さでの重力加速度の大きさを求めよ。

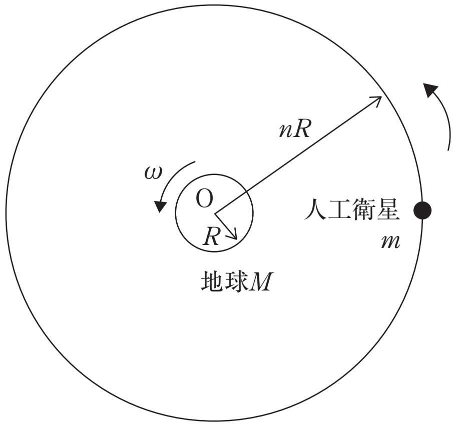
(2)　人工衛星の速さを求めよ。

(3)　人工衛星の円運動の周期を求めよ。

(4)　人工衛星の力学的エネルギーを求めよ。ただし，地球から無限遠方のところを位置エネルギーの基準点とする。

(5)　地球から見て，人工衛星が静止して見えるための n を求めよ。

(6)　人工衛星が無限遠方に行くには，この軌道上での速さをいくら以上にすればよいか。



©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

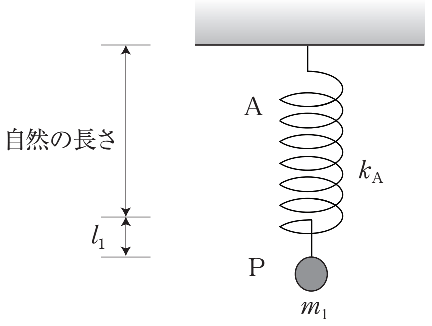
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　確認テスト

［A］ 次の文を読み，下の各問いに対する最も適当な答え選びなさい。ただし，ばねの質量と空気抵抗は無視でき，重力加速度の大きさは g［m/s^2］とする。

図に示すように，ばね定数が k_A［N/m］のばね A の上端を天井に固定し，下端に質量 m_1［kg］のおもりをつり下げたところ，ばねは自然の長さから l_1［m］だけ伸びて点 P で静止した。次に，おもりをばね A の自然の長さの位置まで持ち上げ静かにはなしたところ，おもりは鉛直線上で往復運動（単振動）をはじめた。以下の問いに答えよ。



問 1　おもりの質量 m_1 を，g，l_1 と k_A を用いて表せ。［ア］

① $\dfrac{l_1}{g}$　② $\dfrac{g}{l_1}$　③ $\dfrac{k_A l_1}{g}$　④ $\dfrac{g}{k_A l_1}$　⑤ $k_A l_1$

問 2　おもりが点 P を通過するときの速さは何 m/s か。g と l_1 を用いて表せ。［イ］

解答群

① $\dfrac{\sqrt{gl_1}}{2}$　② $\dfrac{\pi\sqrt{gl_1}}{2}$　③ $\sqrt{gl_1}$　④ $\sqrt{\dfrac{gl_1}{2}}$

⑤ $\sqrt{2gl_1}$

問 3　ばねは自然の長さから最大何 m 伸びるか。l_1 を用いて表せ。［ウ］

解答群

① $\dfrac{l_1}{2}$　② l_1　③ $\dfrac{3l_1}{2}$　④ $2l_1$

⑤ $4l_1$

問 4　問 3 において，おもりの速さは何 m/s か。［エ］

解答群

① 0　② 1　③ 2　④ 4.9

⑤ 9.8

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[B]

次の問題の□の中に入れるべき正しい答を解答群の中から選びなさい。(同じ番号を何回用いてもよい。)

(1) 地球を半径が R の球とみなし，その質量を M，万有引力定数を G とする。地球の自転の効果を無視すれば，地表における重力加速度 g は R，G，M を用いて (ア) で表される。また地表面から高さ h での重力加速度は g の大きさの (イ) 倍である。

(2) いま，地表すれすれに円軌道を描いてまわる質量 m の人工衛星を考えるとき，その速さ v_0 は R，G，M をなどを用いて (ウ) と表される。これを第一宇宙速度という。万有引力の位置エネルギーの基準点を無限遠点にとるとき，この人工衛星がもつ力学的エネルギー E は運動エネルギーと位置エネルギーの和であるので，E は R，G，M，m をなどを用いて (エ) と表される。

一方，地表から h の高さの円軌道をまわる人工衛星の速さを v とすると，それは v_0 の (オ) 倍で，このとき周期は (カ) となる。

解答群

01 $\dfrac{GM}{R^2}$　　02 $\dfrac{2GM}{R^2}$　　03 $\dfrac{GM}{R}$

04 $\dfrac{2GM}{R}$　　05 $\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2$　　06 $\left(\dfrac{R+h}{R}\right)^2$

07 $\sqrt{\dfrac{R}{GM}}$　　08 $\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$　　09 $\sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$

10 $2\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$　　11 $2\pi\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$　　12 $\dfrac{R}{GM}$

13 $-\dfrac{R}{GM}$　　14 $G\dfrac{Mm}{R}$　　15 $-G\dfrac{Mm}{R}$

16 $G\dfrac{Mm}{2R}$　　17 $-G\dfrac{Mm}{2R}$　　18 $\sqrt{\dfrac{R+h}{R}}$

19 $\sqrt{\dfrac{R}{R+h}}$　　20 $\sqrt{\dfrac{(R+h)}{GM}}$　　21 $2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)}{GM}}$

22 $\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{GM}}$　　23 $2\pi\sqrt{\dfrac{(R+h)^3}{GM}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　単振動と万有引力

1

(1) $ma = -ky - mg$

(2) d

(3) $y = -\dfrac{mg}{k}$

(4) $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(5) $d\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

2

(1) $\dfrac{g}{n^2}$

(2) $\sqrt{\dfrac{gR}{n}}$

(3) $2\pi\sqrt{\dfrac{n^3R}{g}}$

(4) $-\dfrac{mgR}{2n}$

(5) $\left(\dfrac{g}{R\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}$

(6) $\sqrt{\dfrac{2gR}{n}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　確認テスト

【解答】

［A］問１　③　　問２　③　　問３　④　　問４　①

［B］㈠　01　　㈡　05　　㈢　08　　㈣　17　　㈤　19　　㈥　23

【解説】

［A］

問１　力のつりあい

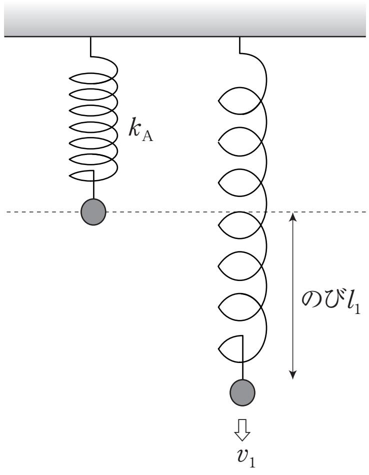
$m_1g=k_\mathrm{A}l_1 \quad \therefore\ m_1=\dfrac{k_\mathrm{A}l_1}{g}$

問２　エネルギー保存則より（自然長の位置を位置エネルギーの基準とする）

$0=\dfrac{1}{2}m_1v_1{}^2+\dfrac{1}{2}k_\mathrm{A}l_1{}^2-m_1gl_1$

$k_\mathrm{A}l_1=m_1g$ を代入して

$\therefore\ v_1=\sqrt{gl_1}$



問３　エネルギー保存則より

$0=\dfrac{1}{2}k_\mathrm{A}l_2{}^2-m_1gl_2$

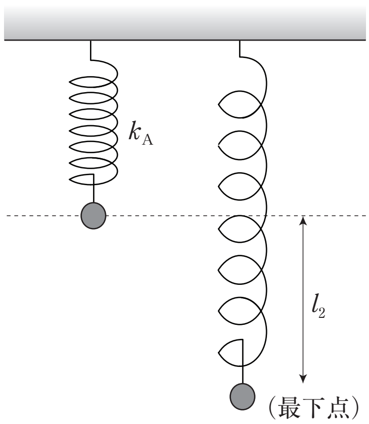
$k_\mathrm{A}=\dfrac{m_1g}{l_1}$ を代入して

$0=\dfrac{1}{2}m_1g\cdot\dfrac{l_2{}^2}{l_1}-m_1gl_2$

$l_2\neq0$ ゆえ，

$l_2=2l_1$

問４　最下点ではおもりは一瞬止まるので，速さは０



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］

(1)　地表における重力 f について，

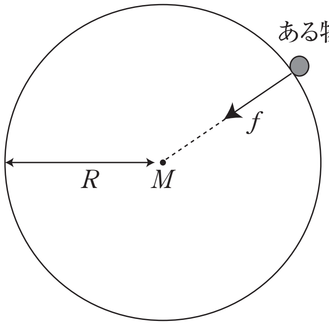
$$G\frac{Mm}{R^2}=mg \quad \cdots\cdots Ⓐ \qquad \therefore\ g=\underline{\frac{GM}{R^2}}$$

高さ h のところでは同様に，

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2}=mg'\cdots\cdots Ⓑ$$

Ⓑ÷Ⓐより，

$$\underline{\frac{g'}{g}=\left(\frac{R}{R+h}\right)^2}$$

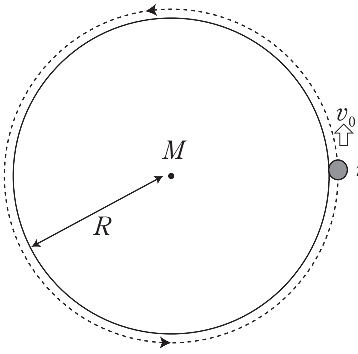


(2)　円運動の方程式

$$m\frac{{v_0}^2}{R}=G\frac{Mm}{R^2}\cdots\cdots Ⓒ \qquad \therefore\ v_0=\underline{\sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

全エネルギーは

$$E=\frac{1}{2}m{v_0}^2+\left(-G\frac{Mm}{R}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{GMm}{R}-\frac{GMm}{R}=\underline{-\frac{GMm}{2R}}$$



地表から h のところでの，円運動の方程式は，

$$m\frac{v^2}{(R+h)}=G\frac{Mm}{(R+h)^2}\cdots\cdots Ⓓ$$

Ⓓ÷Ⓒより，

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2=\frac{R}{R+h} \qquad \therefore\ v=\underline{\sqrt{\frac{R}{R+h}}}\ v_0$$

周期は

$$T=\frac{2\pi(R+h)}{v}=2\pi(R+h)\sqrt{\frac{R+h}{GM}}=\underline{2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}}$$

↑Ⓓより $v=\sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。